

: Белорус.-Рос. ун-т, 2011. – 396 с. : ил. – С. 311–315.

6. Турпищева, М. С. Управление транспортной системой на основе моделирования взаимоувязанного движения автотранспортных и пассажирских потоков / М. С. Турпищева, Е. Р. Нурғалиев // Инновационные технологии в машиностроении: проблемы, задачи, решения : сб. науч. трудов / гл. ред. А. Н. Емельюшин; отв. ред. А. А. Веселовский. – Орск : Изд-во Орского гуманитарно-технологического ин-та (филиала) ОГУ, 2012. – 210 с.

7. Нурғалиев, Е. Р. Математическое моделирование автотранспортных пассажирских перевозок : монография / Е. Р. Нурғалиев. – LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. – 2012. – 122 с.

8. Нурғалиев, Е. Р. Логистические модели пассажирских транспортных комплексов / Е. Р. Нурғалиев, М. С. Турпищева // Сб. науч. трудов № 5 по направлению «Технология, организация и управление автомобильными перевозками. Теория и практика» Всероссийской 66-й научно-практической конференции на базе ФГБОУ ВПО СибАДИ. – Омск : СибАДИ, 2012.

Bielomyttsev A.S.

candidate of technical sciences, docent,

docent of the department «Theoretical Mechanics»

National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute»

Druzhynin E.I.

candidate of technical sciences, docent,

docent of the department «Theoretical Mechanics»

National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute»

RESEARCH OF THE GLOBAL STRUCTURE OF SOLUTIONS OF A SYSTEM WITH ONE STAGE OF FREEDOM ON A STROBOSCOPIC PHASE PLANE

Бело́мытцев Андрей Серге́евич

кандидат технических наук, доцент,

доцент кафедры «Теоретическая механика»

Национальный Технический Университет

«Харьковский политехнический институт»

Дру́жинин Евге́ний Ива́нович

кандидат технических наук, доцент,

доцент кафедры «Теоретическая механика»

Национальный Технический Университет

«Харьковский политехнический институт»

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ НА СТРОБОСКОПИЧЕСКОЙ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Summary. The results of the study of the regions of attraction of the periodic modes of the system with one degree of freedom simulating the power transmission of a piston engine of a tracked vehicle are presented. The study was carried out with the aim of predicting possible steady-state system modes in a wide frequency range of the disturbing effect, as well as to assess the attractive areas of the most dangerous resonant vibrations. As a result of a numerical experiment, not only periodic oscillations of various types were found, but also typical bifurcations of periodic solutions. A study was made of the global structure of solutions on the stroboscopic phase plane, which made it possible to estimate the attraction regions of stable periodic regimes. It was found that the nonlinearity of the elastic characteristics of the drive to the consumer makes it possible to develop complex nonlinear oscillations in the system, accompanied by the opening of the gap in the splined joint and impacts on the stops, which can cause premature destruction of structural elements.

Аннотация. Приведены результаты исследования областей притяжения периодических режимов системы с одной степенью свободы, моделирующей силовую передачу поршневого двигателя гусеничной машины. Исследование проводилось с целью прогнозирования возможных установившихся режимов системы в широком частотном диапазоне возмущающего воздействия, а также для оценки областей притяжения наиболее опасных резонансных колебаний. В результате численного эксперимента были обнаружены не только периодические колебания различных типов, но и типичные бифуркации периодических решений. Проведено исследование глобальной структуры решений на стробоскопической фазовой плоскости, что позволило оценить области притяжения устойчивых периодических режимов. Было установлено, что нелинейность упругой характеристики привода к потребителю обуславливает возможность развития в системе сложных нелинейных колебаний, сопровождающихся раскрытием зазора в шлицевом соединении и ударами об упоры, что может явиться причиной преждевременного разрушения элементов конструкции.

Key words: essentially nonlinear systems, stable periodic oscillations, fixed point, region of attraction of stable periodic motions, numerical experiment.

Ключевые слова: существенно нелинейные системы, устойчивые периодические колебания, неподвижная точка, область притяжения устойчивых периодических движений, численный эксперимент.

Постановка проблемы, анализ последних исследований. Задача расчетного анализа вынужденных колебаний является актуальной для силовых установок, которые содержат мощный источник возбуждения в виде поршневого двигателя внутреннего сгорания, что характерно для колесных и гусеничных транспортных машин, сельскохозяйственной техники и тепловозных установок.

Установившиеся движения существенно-нелинейных систем с конечным числом степеней свободы, находящихся под воздействием внешних периодических сил, могут быть периодическими и почти периодическими, а также хаотическими, образующими странные аттракторы. Наибольшее значение имеет исследование периодических колебаний, поскольку другие установившиеся движения возникают при бифуркациях периодических и области их существования могут быть установлены при расчете последних. Характерной особенностью вынужденных периодических колебаний является их неоднозначность, то есть возможность существования нескольких периодических решений дифференциальных уравнений движения при одном и том же наборе параметров системы. В связи с этим необходимым элементом анализа является оценка устойчивости решений по Ляпунову, позволяющая установить физически реализуемые движения.

Вынужденные колебания периодически возбуждаемой системы с n степенями свободы описываются неавтономным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = \Phi(t, y), \quad (1)$$

где Y - $2n$ - мерный вектор состояния, Φ - $2n$ - мерная вектор-функция, T_1 - периодическая по явно входящему времени t : $\Phi(t, y) = \Phi(t + T_1, y)$.

Следует отметить, что получение новых эффективных способов оценки устойчивости периодических решений уравнения (1) стало возможным в связи с разработкой итерационных методов анализа, получивших название: метод пристрелки [1]. Специальный вариант этого метода позволяет получать решения в области неоднозначности [2, 3]. Однако оценка устойчивости позволяет **установить только сам факт устойчивости или неустойчивости** движения, то есть **оценить** устойчивость в малом. Надежность выводов о возможных установившихся движениях системы **существенно** повышаются в тех случаях, когда удастся оценить запасы **устойчивости**

периодических движений с учетом случайных изменений начальных условий системы. Решение этого вопроса **связано с исследованием устойчивости** в большом, которое сводится к определению областей притяжения **устойчивых** периодических режимов.

Известны два различных подхода к исследованию областей притяжения. Первый подход базируется на методе медленно меняющихся амплитуд, в соответствии с которым осуществляется переход от исходного неавтономного дифференциального уравнения второго порядка к вспомогательной системе двух автономных уравнений первого порядка относительно медленно меняющихся коэффициентов [4, 5]. Однако такой подход, как отмечено в [6], применим для исследования областей притяжения лишь в простейших случаях. Более глубокий анализ может быть проведен на основе метода, различные варианты которого объединяет общее название: стробоскопический метод.

Расширенное фазовое пространство неавтономной системы является $(2n + 1)$ - мерным, где n - число степеней свободы системы, поэтому изучение фазовых траекторий в таком пространстве и разбиение его на области притяжения затруднено даже для системы с одной степенью свободы. В то же время известно [7], что задача изучения структуры фазового пространства динамической системы эквивалентна изучению структуры порождаемого фазовыми траекториями системы точечного отображения на некоторой секущей поверхности.

При исследовании T_1 - периодических динамических систем наиболее эффективен стробоскопический вариант метода точечных отображений, использующий отображение сдвига по траекториям U_{T_1} . Это отображение определено в фазовом пространстве размерности $2n$, что позволяет для систем с одной степенью свободы использовать наглядные геометрические построения на стробоскопической фазовой плоскости. При этом T_1 - периодическому движению соответствует неподвижная точка отображения U_{T_1} , то есть $U_{T_1}y_0 = y_0$, а субгармоническим колебаниям порядка s - неподвижная точка отображения $U_{T_1}^s$: $U_{T_1}^s y_0 = y_0$, причем субгармоническому решению ставится в соответствие цикл из s точек $y_0, U_{T_1}y_0, \dots, U_{T_1}^{s-1}y_0$.

Областью притяжения неподвижной точки y^* (0) называют множество точек стробоскопической фазовой плоскости $\{y(0)\}$, для которых решения $y(t)$ сходятся к асимптотически устойчивому периодическому решению $y^*(t)$. Границами

областей притяжения служат кривые, инвариантные относительно отображения U_{T_1} (или $U_{T_1}^S$), которые проходят через неустойчивые неподвижные точки типа "седло". Поэтому особое значение имеет построение сепаратрис, входящих в седловые точки, для чего используется интегрирование уравнений движения при отрицательном отсчете времени [5].

Использование стробоскопических фазовых пространств для систем с более чем одной степенью свободы сопровождается почти непреодолимыми вычислительными трудностями, особенно при построении Сапаратрисных поверхностей. Это обстоятельство, а также ненаглядность построений в многомерном пространстве объясняют использование стробоскопического фазового пространства, за редкими исключениями [4, 5], лишь для исследования системы с одной степенью свободы. При изучении областей притяжения периодических режимов в многомерных динамических системах приходится ограничиваться построением ядер областей притяжения [8], которые, впрочем, только и представляют практический интерес.

Цель статьи. Получить соотношения, описывающие точечные отображения в окрестности неподвижных точек и позволяющие объяснить структуры порождаемых ими фазовых траекторий.

Изложение основного материала. Пусть $y = y * (t) - T_1$ - периодическое решение уравнения (1), $y = (y_1, y_2)^T$. Рассмотрим возмущенное движение системы $y(t)$, которое можно описать вектор-функцией $x(t) = y(t) - y * (t)$. В малой окрестности периодического решения эта функция удовлетворяет (приближенно) уравнению в вариациях

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=y^*(t)} x. \quad (2)$$

Пусть матрица монодромии $\Phi(T_1)$ уравнения (2) имеет действительные собственные значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$, которым соответствуют действительные собственные векторы h_1 и h_2 :

$$\Phi(T_1)h_i = \lambda_i h_i, i = 1, 2. \quad (3)$$

Векторы h_1, h_2 можно принять за базис пространства, тогда любой вектор $x(0)$ может быть представлен в виде:

$$x(0) = \xi_1^0 h_1 + \xi_2^0 h_2, \quad (4)$$

где ξ_1^0, ξ_2^0 - координаты точки $x(0)$ в системе координат с центром в точке y_0^* , и осями, совпадающими с векторами h_1, h_2 . Решение уравнения (2) может быть записано через матрицант $\Phi(t)$ этого уравнения

$$x(t) = \Phi(t)x(0), \quad (5)$$

откуда, с учетом (3) и (4), следует

[illegible]

Таким образом, координаты точки $x(mT_1)$ в выбранной системе координат имеют вид

$$\xi_1^m = \lambda_1^m \xi_1^0, \xi_2^m = \lambda_2^m \xi_2^0, \quad (7)$$

что можно записать также с помощью
рекуррентных соотношений

$$\xi_1^m = \lambda_1 \xi_1^{m-1}, \xi_2^m = \lambda_2 \xi_2^{m-1}. \quad (8)$$

Формулы (7) или (8) представляют собой линеаризованное точечное отображение, хорошо описывающее движение стробоскопической точки в малой окрестности неподвижной точки $y_0^* = y^*(0)$. Для удобства изображения инвариантных кривых в окрестности неподвижной точки отобразим аффинно исходную стробоскопическую фазовую плоскость на вспомогательную плоскость так, чтобы векторы h_1 и h_2 перешли во взаимно ортогональные.

Соотношения (8) позволяют установить тип неподвижной точки y_0^* , который зависит от величин чисел λ_1, λ_2 :

- 1) "устойчивый узел", если $|\lambda_1| < 1$ и $|\lambda_2| < 1$;
- 2) "неустойчивый узел", если $|\lambda_1| > 1$ и $|\lambda_2| > 1$;
- 3) "седло", если $|\lambda_1| < 1$ и $|\lambda_2| > 1$ или $|\lambda_1| > 1$ и $|\lambda_2| < 1$.

В зависимости от знаков λ_1, λ_2 будем различать неподвижные точки, в окрестности которых отображение U_{T_1} не изменяет ориентацию, и точки, в окрестности которых U_{T_1} изменяет ориентацию по одной или двум координатам. Ниже будет использована сокращенная запись, например, «точка с изменением ориентации по двум координатам»:

- 1) точка без изменения ориентации, если $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$; в этом случае последовательные точки отображения U_{T_1} лежат в одном квадранте;
- 2) точка с изменением ориентации по одной координате, если $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$ или $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0$; в этом случае последовательные точки отображения U_{T_1} лежат в смежных квадрантах, а кривые, их соединяющие, оказываются симметричными относительно координатной оси;
- 3) точка с изменением ориентации по двум координатам, если $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$; в этом случае последовательные точки отображения U_{T_1} на вспомогательной плоскости лежат в противоположных квадрантах, а кривые, их соединяющие, симметричны относительно начала координат.

Два последних случая могут быть сведены к первому при рассмотрении отображения $U_{T_1}^2$. Действительно, последовательные точки отображения $U_{T_1}^2$ лежат в одном квадранте. Однако использование отображения U_{T_1} при построении фазовых траекторий в окрестности точек с

изменением ориентации позволяет строить сразу обе ветви траектории. На рис. 1 показаны на вспомогательной плоскости окрестности неподвижных точек с изменением ориентации по двум координатам: неустойчивый узел, $\lambda_1 < -1$, $\lambda_2 < -1$ и седло, $\lambda_1 < -1$, $-1 < \lambda_2 < 0$.

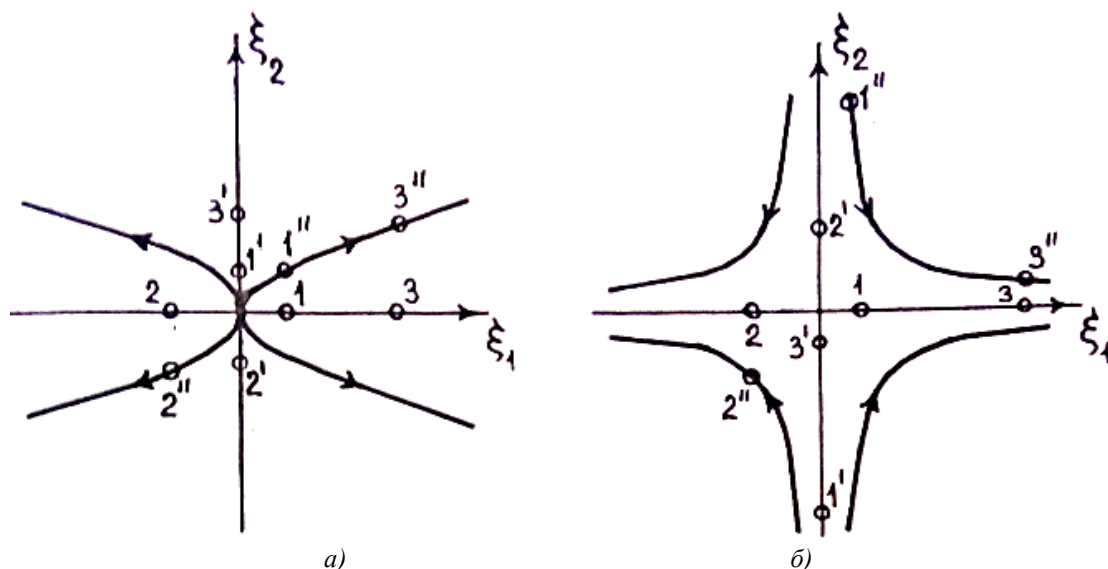


Рисунок 1. Неподвижные точки с изменением ориентации:
а) – неустойчивый узел; б) – седло.

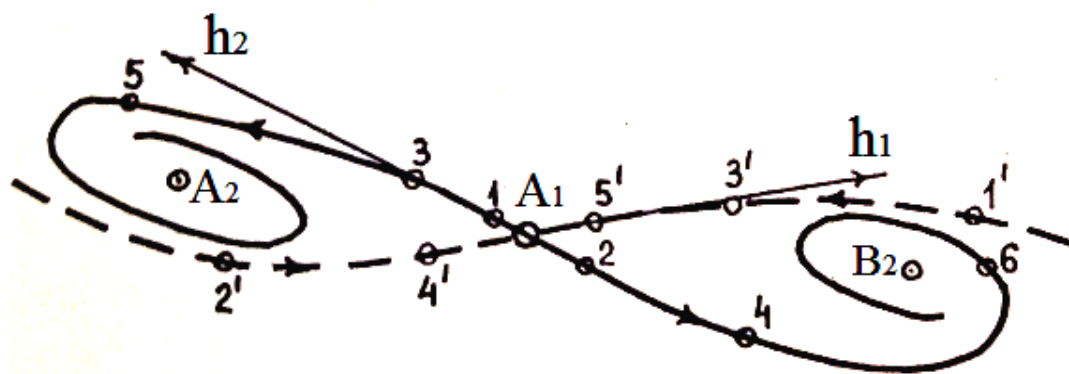


Рисунок 2. Возникновение решений удвоенного периода

Координатные оси ξ_1 и ξ_2 имеют направления векторов, в которые переходят векторы h_1 и h_2 при аффинном отображении. Точки 1, 2, 3, ..., 1', 2', 3', ... обозначают отдельные последовательности точек отображения U_{T_1} , стрелками показано направление движения точек при положительном отсчете времени.

Как отмечалось выше, границами областей притяжения устойчивых неподвижных точек являются инвариантные кривые, входящие в седловые точки. Для получения достаточного количества точек этих кривых обычно необходимо построение нескольких последовательностей точечных отображений при отрицательном отсчете времени. Начальные точки этих последовательностей необходимо выбрать на касательной к сепаратрисам, входящим в седловую точку. Нетрудно показать, что направление такой

касательной задается собственным вектором h_i , соответствующим собственному значению $|\lambda_i| < 1$; при этом второй собственный вектор задает направление касательной к инвариантным кривым, выходящим из седловой точки. На рис. 2 пунктиром показаны инвариантные кривые, входящие в неподвижную седловую точку с изменением ориентации по двум координатам (A_1). Собственные векторы h_1 и h_2 задают направления касательных к инвариантным кривым в точке A_1 .

Рассмотрим случай комплексно-сопряженных собственных значений матрицы монодромии $\Phi(T_1)$: $\lambda_{1,2} = \mu \pm iv$, которым соответствуют комплексно-сопряженные собственные векторы $g_{1,2} = h_1 \pm ih_2$. Пусть для определенности $v > 0$. Нетрудно показать, что имеют место соотношения

$$\Phi(T_1)h_1 = \mu h_1 - v h_2, \Phi(T_1)h_2 = v h_1 + \mu h_2. \quad (9)$$

Векторы h_1 и h_2 , как и в предыдущем случае, могут быть выбраны за базис пространства. Из (4), (5) и (9) следует тогда

$$x(mT_1) = \xi_1^m h_1 + \xi_2^m h_2, \quad (10)$$

где

$$\xi_1^m = \mu \xi_1^{m-1} + \nu \xi_2^{m-1}, \xi_2^m = -\nu \xi_1^{m-1} + \mu \xi_2^{m-1}. \quad (11)$$

Отобразим аффинно исходную фазовую плоскость на вспомогательную, в которой векторы h_1 и h_2 переходят во взаимно ортогональные, и введем переменные ρ и γ :

$$\rho = \sqrt{\nu^2 + \mu^2} = |\lambda_i|, \cos \gamma = \mu/\rho, \sin \gamma = \nu/\rho, \quad (12)$$

тогда формулы (11) примут вид

$$\begin{cases} \xi_1^m = \rho(\xi_1^{m-1} \cos \gamma + \xi_2^{m-1} \sin \gamma), \\ \xi_2^m = \rho(-\xi_1^{m-1} \sin \gamma + \xi_2^{m-1} \cos \gamma). \end{cases} \quad (13)$$

На вспомогательной фазовой плоскости за положительное направление отсчета угла γ выберем направление поворота вектора h_2 к h_1 на наименьший угол. Тогда преобразование (13) соответствует повороту вектора $x((m-1)T_1)$ на угол γ с изменением его длины в ρ раз. Так как выше было принято $\nu > 0$, то угол γ определяется однозначно

$$\gamma = \arccos(\mu/\rho). \quad (14)$$

При обратном отображении вспомогательной плоскости на исходную фазовые траектории соответствующим образом деформируются.

Итак, при комплексно-сопряженных собственных значениях матрицы $\Phi(T_1)$ имеем неподвижную точку типа “фокус”, которая асимптотически устойчива, если $\rho < 1$, и

неустойчива, если $\rho > 1$. Направление закручивания фазовых траекторий задается правилом отсчета угла γ , а угол между радиусами-векторами, соответствующими двум последовательным точкам отображения U_{T_1} , - формулой (14).

Таким образом, для выяснения глобальной структуры решений уравнения (1) достаточно определить все периодические решения этого уравнения и соответствующие им неподвижные точки отображений $U_{T_1}^S$, где S - порядок субгармонического решения.

Из сказанного выше следует, что тип неподвижной точки и, следовательно, структура фазовых траекторий в ее окрестности полностью определяются мультипликаторами уравнения (2). Вычисление мультипликаторов, как было показано в [1, 3], сводится к определению собственных чисел матриц, которые формируются в ходе итерационных процессов определения периодических решений.

Исследуем области притяжения периодических режимов системы с одной степенью свободы, моделирующей силовую передачу поршневого двигателя гусеничной машины. Расчетное исследование данной силовой передачи проводилось на этапе проектирования установки шестицилиндрового турбопоршневого двигателя в гусеничной машине. Исследование проводилось с целью прогнозирования возможных установившихся режимов системы в широком частотном диапазоне возмущающего воздействия, а также для оценки областей притяжения наиболее опасных резонансных колебаний.

В качестве расчетной была принята модель силовой передачи, представленная на рис. 3, позволяющая оценить влияние нелинейной упругой характеристики привода к потребителю на динамику системы.

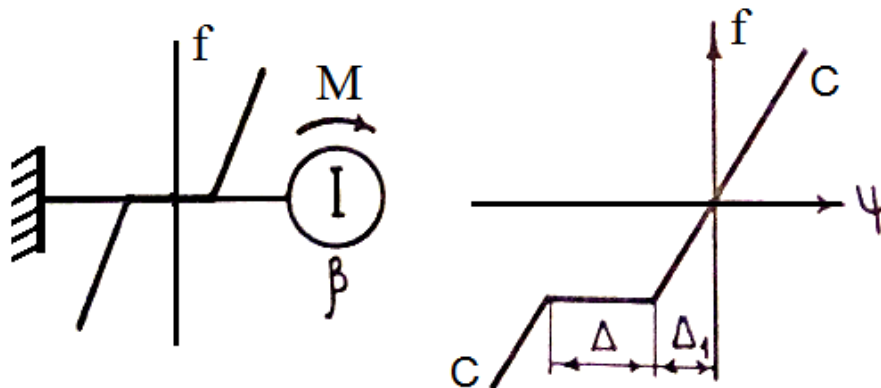


Рисунок 3. Расчетная механическая модель

Инерционный элемент расчетной модели (рис. 3) представляет собой цилиндрические массы коленчатого вала и главную передачу. Несимметричность упругой характеристики обусловлена передаваемым соединением средним моментом. Параметры системы имеют следующие значения: момент инерции $I = 0,261 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$;

жесткость $C = 7,056 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}$; величина зазора $\Delta = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$; $\Delta_1 = 1,3889 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$; коэффициент линейного демпфирования $\beta = 9,8 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. В качестве возмущающего воздействия рассматривалась главная (шестая) гармоника момента двигателя $M = M_0 \sin(\omega t)$, где $M_0 = 637 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

В результате расчетов были обнаружены не

только периодические колебания различных типов (основные, суб- и супергармонические), но и типичные бифуркации периодических решений. Исследование глобальной структуры решений проводилось на стробоскопической фазовой плоскости, что позволило оценить области притяжения устойчивых периодических режимов; через ψ обозначен угол закручивания нелинейного соединения.

На рис. 4 приведены кривые максимального и минимального значений угла закручивания, соответствующие основным колебаниям системы. Участок ветви A_1 при $\omega < 970$ рад/с соответствует линейным нерезонансным колебаниям, не

сопровождающимся выходом B зазор. Наиболее опасными являются резонансные колебания (ветвь C_1) с ударами об оба упора. Как показали результаты расчетов, ветви C_1 и A_1 имеют неустойчивые участки, обозначенные на рис. 4 цифрами 1 и 2 соответственно. В этих зонах система имеет сложную структуру решений, связанную с процессом удвоения периодов. Было обнаружено, что неустойчивым периодическим решениям на ветвях C_1 и A_1 , C_2 и A_2 и т.д. (рис. 5) соответствуют седловые неподвижные точки с изменением ориентации по двум координатам, устойчивым решениям на этих же ветвях - неподвижные точки типа "фокус".

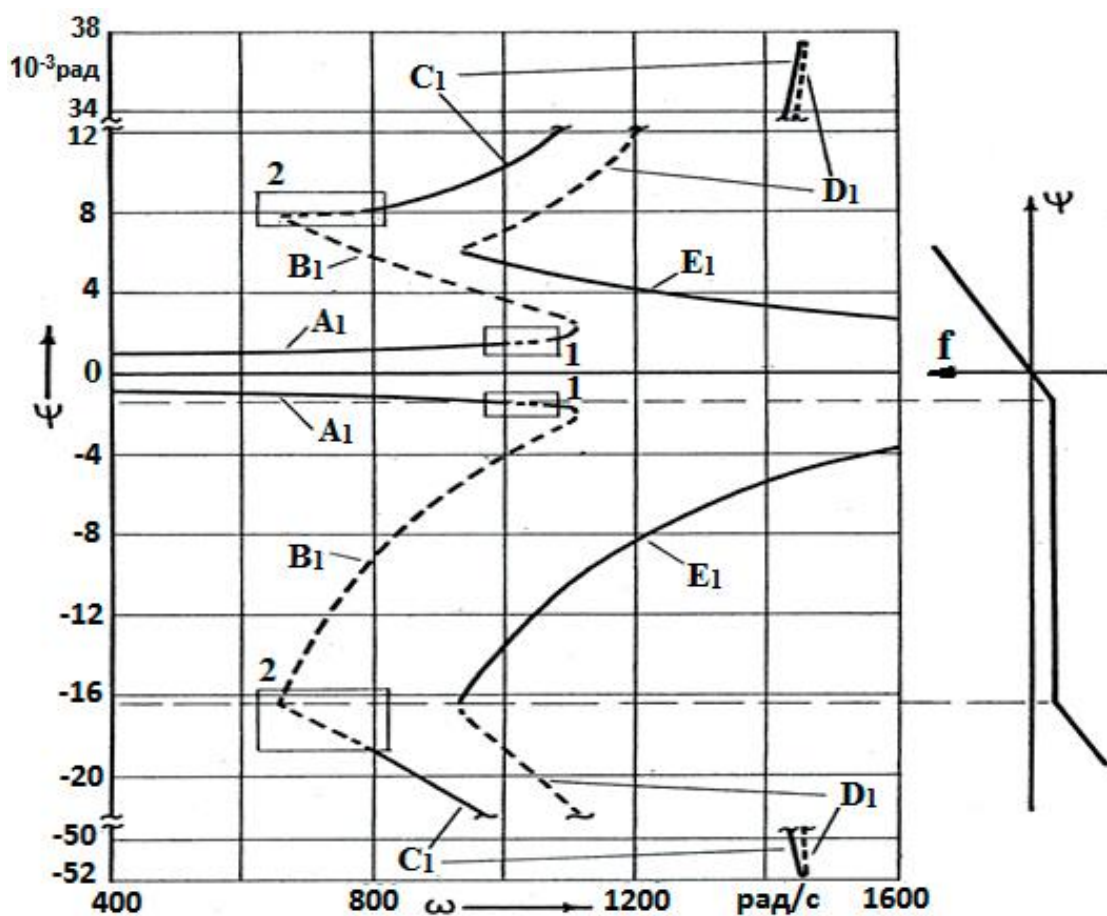


Рисунок 4. Основные колебательные режимы

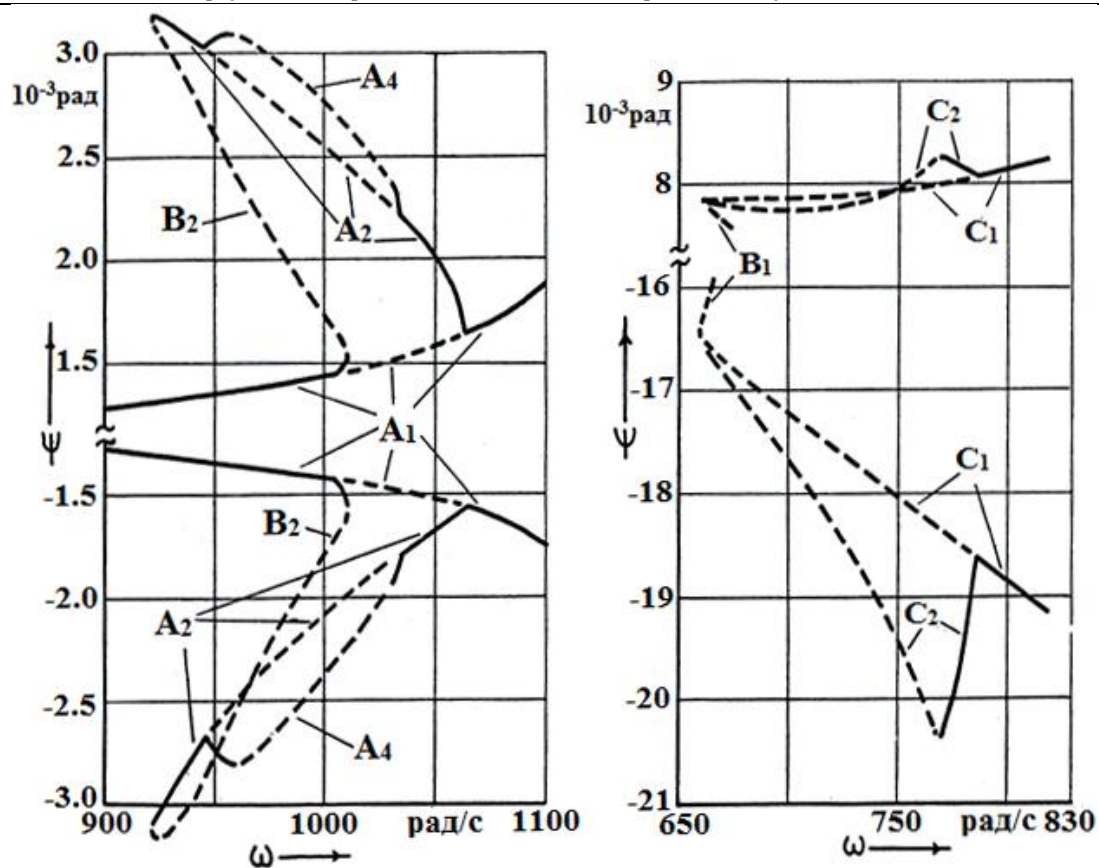


Рисунок 5. Области удвоения периодов

В частотном диапазоне $\omega \in (420; 815)$ рад/с 6).
были обнаружены супергармонические колебания,
ветви которых образуют замкнутую кривую (рис.

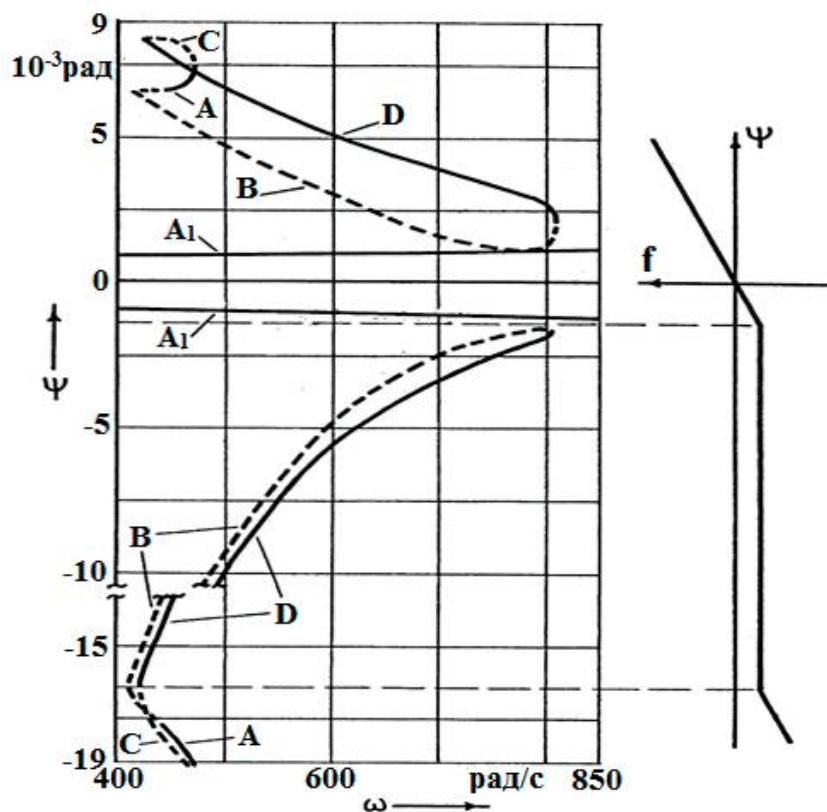


Рисунок 6. Супергармонические режимы

Ветви этих колебаний, имеющих, как и основные, период, равный периоду возмущающего воздействия, обозначены буквами А, В, С, D. Супергармонические колебания, как следует из рис. 6, достигают значительных размахов, существенно превышая существующие в этом же частотном диапазоне устойчивые линейные колебания (см. рис. 6, ветвь A_1): колебания на ветви D сопровождаются ударами об один упор, а на устойчивом участке ветви А - об оба упора.

На рис. 7 показаны замкнутые кривые

субгармонических колебаний, размахи которых значительно превышают размахи основных колебаний (см. рис. 7, ветвь E_1). Проведенный анализ показывает, что рассматриваемая система имеет несколько частотных диапазонов, в которых возможно возникновение интенсивных крутильных колебаний. Практический интерес представлял частотный диапазон $\omega \in (900; 2700)$ рад/с, включающий в себя основной и субгармонические резонансы.

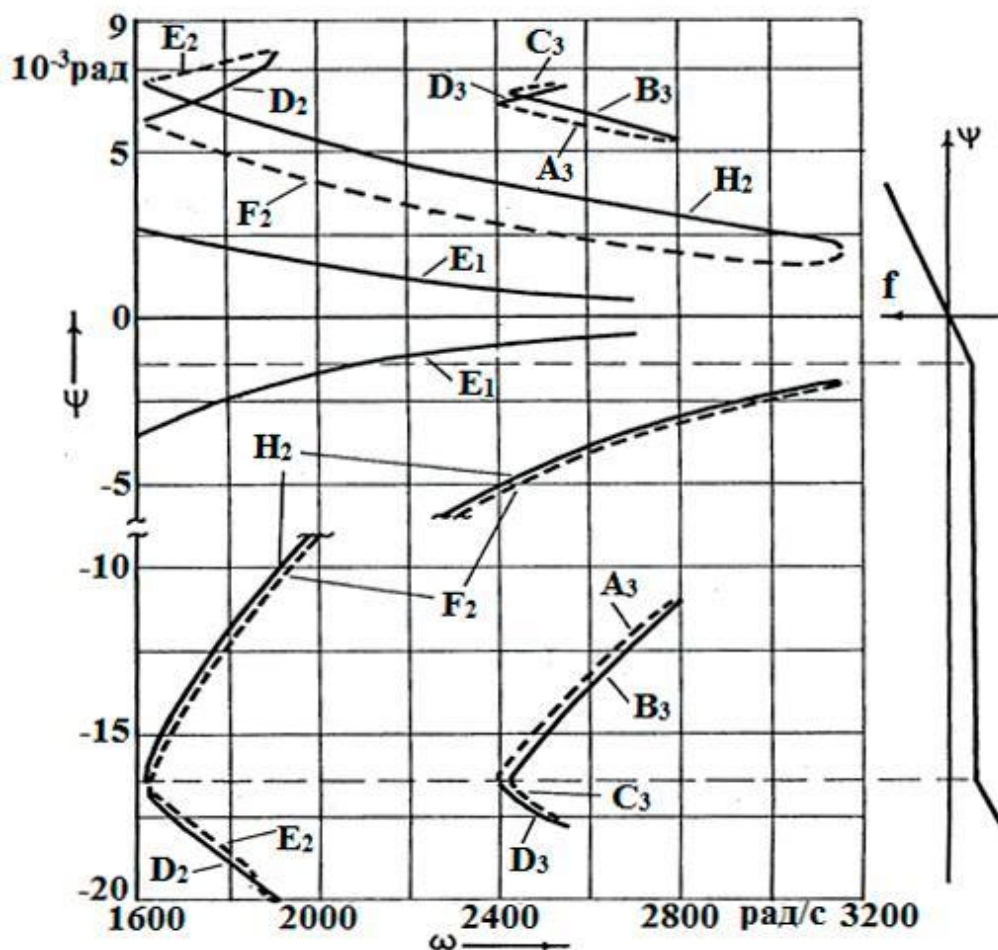


Рисунок 7. Субгармонические режимы

Было проведено исследование областей притяжения периодических решений в резонансных зонах, позволившее оценить как устойчивость в большом, так и вероятность возникновения того или иного устойчивого движения.

На рис. 8 приведены в одном масштабе области притяжения основных режимов при различных значениях частоты возмущающего

воздействия. Неподвижные точки отображения U_{T_1} имеют обозначения, соответствующие обозначениям ветвей на рис. 4, заштрихованы области притяжения нерезонансных режимов. Все седловые точки на рис. 8 без изменения ориентации, входящие в них инвариантные кривые являются границами областей притяжения устойчивых неподвижных точек типа "фокус"

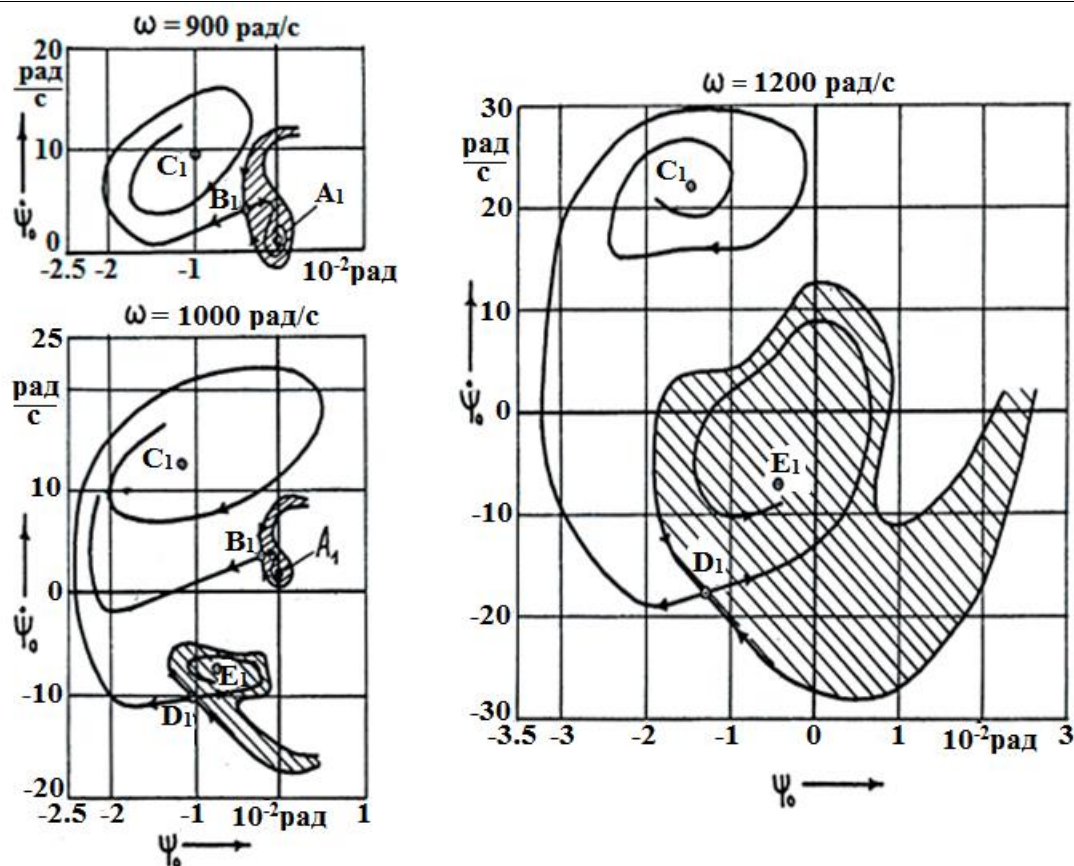


Рисунок 8. Области притяжения основных режимов

Окрестность точки A_1 при $\omega = 1000$ рад/с имеет более сложную структуру, чем показанная на рис. 8, так как эта точка попадает в зону удвоения периодов. Однако детализация столь малой области практического значения не имеет. Как видно из рисунков, область притяжения нерезонансного режима A_1 , очень мала при $\omega = 900$ рад/с и уменьшается при увеличении ω до 1110 рад/с, где происходит слияние седловой точки B_1 и фокальной A_1 , приводящее к их исчезновению.

Таким образом, в данном частотном диапазоне наиболее велика вероятность установления резонансных колебаний (ветвь C_1). При $\omega = 930$ рад/с возникают ветви решений D_1 и E_1 , причем с

увеличением ω область притяжения нерезонансного режима E_1 быстро увеличивается, уменьшая тем самым вероятность возникновения колебаний на ветви C_1 . Однако и при $\omega = 1200$ рад/с возмущения, возможные в системе, в состоянии вывести колебательный процесс из области притяжения режима E_1 . Кроме того, велика опасность развития резонансных колебаний при медленном увеличении частоты до $\omega = 1450$ рад/с, так как, раз возникнув, колебательный процесс не выйдет из области притяжения режима C_1 .

На рис. 9 приведены области притяжения устойчивых субгармонических режимов, которые заштрихованы.

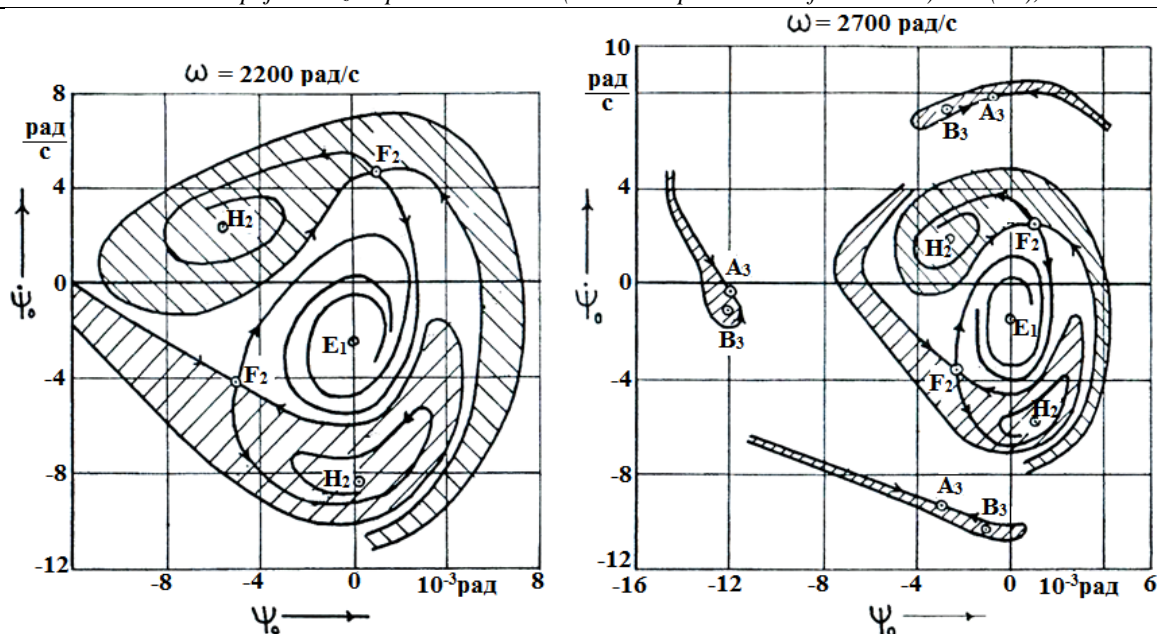


Рисунок 9. Области притяжения субгармонических режимов

Области притяжения субгармонических решений 3-го порядка невелики, в связи с чем вероятность развития этих колебаний незначительна. Возникновение же субгармонических колебаний 2-го порядка, судя по их областям притяжения, вполне вероятно и должно учитываться при проектировании силовой передачи.

Выводы. Расчетные исследования позволяют сделать следующие заключения:

1) нелинейность упругой характеристики привода к потребителю обуславливает возможность развития в системе сложных нелинейных колебаний, сопровождающихся раскрытием зазора в шлицевом соединении и ударами об упоры. Эти колебания могут явиться причиной преждевременного разрушения элементов конструкции;

2) наибольшую опасность в рассматриваемом частотном диапазоне представляют устойчивые колебания в зонах основного резонанса $\omega \in (900; 1450)$ рад/с (см. рис. 4, ветвь C1) и субгармонического резонанса $\omega \in (1620; 1900)$ рад/с (см. рис. 7, ветвь D2), которые сопровождаются ударами об оба упора;

3) для более детального исследования силовой передачи необходимо уточнение жесткостных и инерционных характеристик системы, а также параметров демпфирования, что позволит использовать более подробную расчетную схему.

Список литературы:

1. Андреев Ю.М. Дослідження коливаний нелінійних систем методом точкових відображень / Ю.М. Андреев, А.С.Беломытцев, Є.І. Дружинін // *Машинознавство*. – 2011.– № 11-12 (173-174). – С.3-7.
2. Беломытцев А.С. Алгоритм решения нелинейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений в области многозначности / А.С. Беломытцев, В.Н. Карабан // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 1986. – Т. 26, № 7. – С. 1099-1102.
3. Беломытцев А.С. Численное исследование существенно нелинейных колебательных систем / А.С. Беломытцев // *Динамика и прочность машин: Респ. межвед. науч.-техн. сб.* – Харьков, 1990. – Вып. 51. – С. 25-34.
4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах / Т. Хаяси // – М.: Мир, 1968. – 432 с.
5. Тондл А. Нелинейные колебания механических систем / А. Тондл // – М.: Мир, 1973. – 334с.
6. Крюков Б.И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем / Б.И. Крюков. // М.: Машиностроение, 1984. – 216 с.
7. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний / Ю.И. Неймарк // URSS. 2016. 472 с.
8. Закржевский М.В. Колебания существенно-нелинейных механических систем / М.В. Закржевский// Рига: Зинатне, 1980. – 190 с.